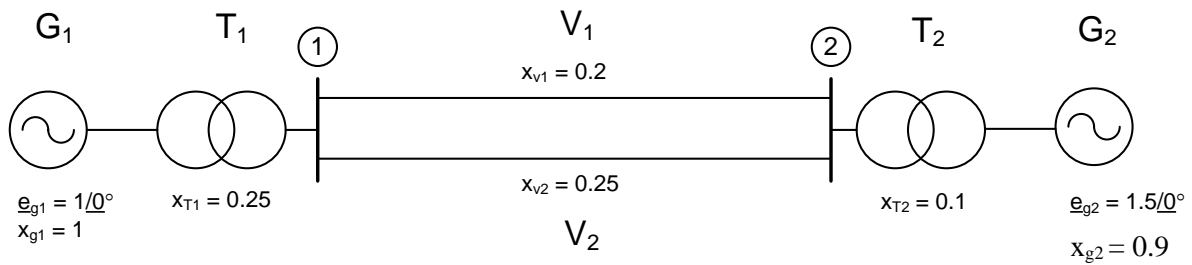


Zadatak 17.

Odrediti napone i struje grana koristeći matrični metod napona nezavisnih čvorova za dio elektroenergetskog sistema prikazanog na slici. Sve vrijednosti date su u relativnim jedinicama.

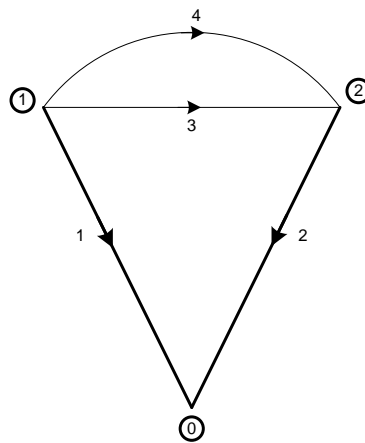


Rješenje:

Matematički model matričnog metoda napona nezavisnih čvorova:

$$\begin{aligned}
 Y_B V_B &= I_B \\
 I_B &= AJ \\
 J &= I_g - YU_g \\
 Y_B &= AYA^T \\
 U &= A^T V_B \\
 I &= YU - J = Y(U + U_g) - I_g
 \end{aligned}$$

Prvi korak je formiranje grafa mreže:



Na grafu je potrebno označiti grane stabla (grane 1 i 2) i grane kostabla (grane 3 i 4).

Na osnovu grafa mreže formira se matrica incidencije grana sa nezavisnim čvorovima:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrica admitansi grana je oblika:

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{j(x_{g1} + x_{T1})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j(x_{g2} + x_{T2})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{jx_{V2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{jx_{V1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j5 \end{bmatrix}$$

Matrica admitansi nezavisnih čvorova je tada:

$$Y_B = AY A^T = \begin{bmatrix} -j9.8 & j9 \\ j9 & -j10 \end{bmatrix}$$

Vektori napona naponskih i struja strujnih generatora su:

$$U_g = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad I_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa je vektor koji sadrži informaciju o svim naponskim i strujnim izvorima u mreži oblika:

$$J = I_g - Y U_g = \begin{bmatrix} -j0.8 \\ -j1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektor injektiranih struja u čvorovima sistema je sada:

$$I_B = A J = \begin{bmatrix} -j0.8 \\ -j1.5 \end{bmatrix}$$

Sada je moguće proračunati vektor napona nezavisnih čvorova:

$$V_B = Y_B^{-1} I_B = \begin{bmatrix} j0.588 & j0.529 \\ j0.529 & j0.576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.8 \\ -j1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \end{bmatrix}$$

Na kraju, potrebno je proračunati napone i struje grana posmatrane mreže:

$$U = A^T V_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \\ -0.023 \\ -0.023 \end{bmatrix}$$

$$I = Y(U + U_g) - I_g = \begin{bmatrix} -j0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \\ -0.023 \\ -0.023 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -j0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.264 \\ -0.213 \\ -0.023 \\ -0.023 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j0.211 \\ j0.211 \\ j0.094 \\ j0.117 \end{bmatrix}$$

Time su proračunate naponsko strujne prilike u mreži iz zadatka koristeći metod napona nezavisnih čvorova.

Zadatak 18.

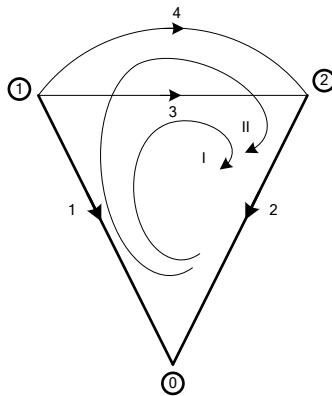
Odrediti napone i struje grana koristeći matični metod struja nezavisnih kontura za dio elektroenergetskog sistema prikazanog na slici iz prethodnog zadatka. Sve vrijednosti date su u relativnim jedinicama.

Rješenje:

Matematički model metoda struja nezavisnih kontura je:

$$\begin{aligned}Z_L I_L &= V_L \\V_L &= BE \\E &= U_g - Z I_g \\Z_L &= BZB^T \\I &= B^T I_L \\U &= ZI - E = Z(I + I_g) - U_g\end{aligned}$$

Prvi korak je formiranje grafa mreže:



Primjećuje se da je za razliku od prethodnog zadatka prisutno i označavanje nezavisnih kontura koje su usmjerene u smjeru grana kostabla. Sada se formira matrica incidencije grana i nezavisnih kontura:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica impedansi grana je:

$$Z = \begin{bmatrix} j(x_{g1} + x_{T1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j(x_{g2} + x_{T2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jx_{V2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & jx_{V1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j0.2 \end{bmatrix}$$

pa se matrica impedansi nezavisnih kontura određuje kao:

$$Z_L = BZB^T = \begin{bmatrix} j2.5 & j2.25 \\ j2.25 & j2.45 \end{bmatrix}$$

Vektori napona naponskih i struja strujnih generatora su:

$$U_g = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad I_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa je vektor E koji sadrži informaciju o svim naponskim i strujnim izvorima u mreži oblika:

$$E = U_g - ZI_g = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektor napona nezavisnih kontura je tada:

$$V_L = BE = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Uz poznatu matricu impedansi i vektora napona nezavisnih kontura, vektor struja nezavisnih kontura se određuje kao:

$$I_L = Z_L^{-1}V_L = \begin{bmatrix} -j2.306 & j2.118 \\ j2.118 & -2.353 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0.094 \\ j0.117 \end{bmatrix}$$

Vektor struja grana se tada određuje kao:

$$I = B^T I_L = \begin{bmatrix} -j0.211 \\ j0.211 \\ j0.094 \\ j0.117 \end{bmatrix}$$

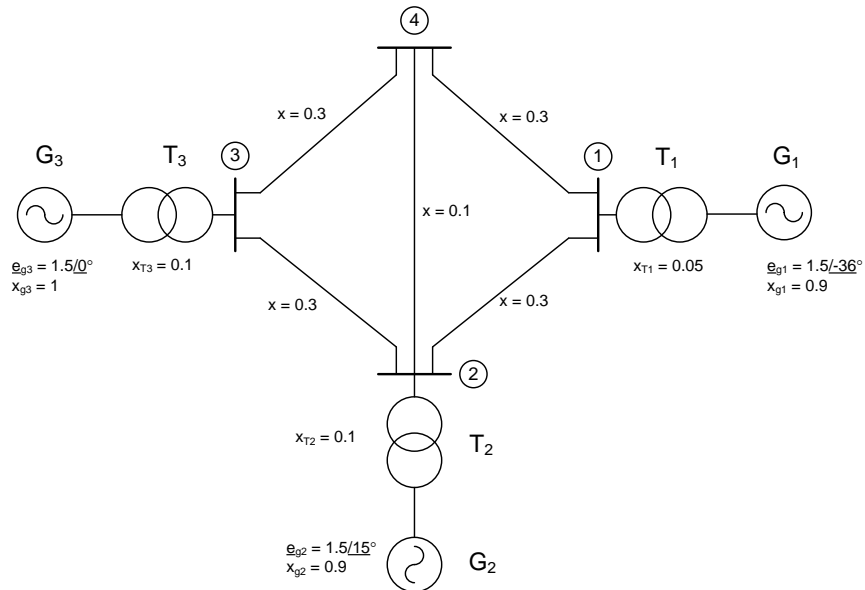
a vektor napona grana je:

$$U = ZI - E = Z(I + I_g) - U_g = \begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \\ -0.023 \\ -0.023 \end{bmatrix}$$

Može se primjetiti da se u oba zadatka očekivano dobijaju isti rezultati.

Zadatak 19.

Za elektroenergetski sistem sa slike, odrediti raspodjele struja i napona primjenom metoda napona nezavisnih čvorova. Koristiti eliminisanje pasivnih čvorova razbijanjem matrice na blokove. Sve vrijednosti date su u relativnim jedinicama.

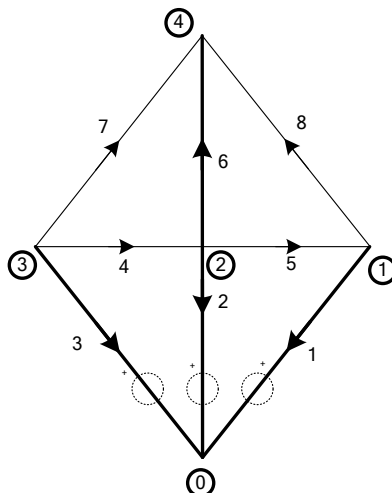


Rješenje:

Matematički model matičnog metoda napona nezavisnih čvorova:

$$\begin{aligned}
 Y_B V_B &= I_B \\
 I_B &= A J \\
 J &= I_g - Y U_g \\
 Y_B &= A Y A^T \\
 U &= A^T V_B \\
 I &= Y U - J = Y(U + U_g) - I_g
 \end{aligned}$$

Prvi korak je formiranje grafa mreže:



Matrica incidencije grana sa nezavisnim čvorovima je tada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrica admitansi grana je tada:

$$Y = \begin{bmatrix} -j1.053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j0.909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j3.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j3.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j3.3 \end{bmatrix}$$

Uz poznatu matricu incidencije grana sa nezavisnim čvorovima i poznatu matricu admitansi grana, matrica admitansi čvorova se određuje kao:

$$Y_B = AY A^T = \begin{bmatrix} -j7.65 & j3.3 & 0 & j3.3 \\ j3.3 & -j17.6 & j3.3 & j10 \\ 0 & j3.3 & -j7.51 & j3.3 \\ j3.3 & j10 & j3.3 & -j16.6 \end{bmatrix}$$

Vektori napona naponskih i struja strujnih generatora su:

$$U_g = \begin{bmatrix} -\underline{e}_1 \\ -\underline{e}_2 \\ -\underline{e}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1.21 - j0.88) \\ -(1.45 + j0.39) \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad I_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa se vektor J određuje kao:

$$J = I_g - Y U_g = \begin{bmatrix} -0.93 - j1.27 \\ 0.39 - j1.45 \\ -j1.36 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a vektor injektiranih struja čvorova kao:

$$I_B = AJ = \begin{bmatrix} -0.93 - j1.27 \\ 0.39 - j1.45 \\ -j1.36 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sada se vektor napona nezavisnih čvorova određuje kao:

$$V_B = Y_B^{-1}I_B = \begin{bmatrix} 1.36 - j0.26 \\ 1.38 - j0.15 \\ 1.4 - j0.14 \\ 1.38 - j0.17 \end{bmatrix}$$

Uočava se da u mreži postoje 4 nezavisna čvora što ukazuje da će matrica Y_B biti dimenzija 4x4, što u stvari predstavlja dimenzionalnost problema. Prethodno rečeno proizilazi iz činjenice da je najzahtjevniji dio proračuna ovom metodom inverzija matrice Y_B . Veća dimenzija matrice izaziva veće opterećenje proračuna, što je naročito izraženo kod sistema sa velikim brojem čvorova.

Kako bi se donekle pojednostavio proračun može se uraditi određena modifikacija metode, tzv. eliminacija pasivnih čvorova. Pasivni čvorovi su oni čvorovi u koje se stiču grane koje nemaju generatora (u ovom zadatku je to čvor 4). Tada se može pisati

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} & \underline{Y}_{14} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} & \underline{Y}_{24} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} & \underline{Y}_{34} \\ \underline{Y}_{41} & \underline{Y}_{42} & \underline{Y}_{43} & \underline{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{B1} \\ \underline{I}_{B2} \\ \underline{I}_{B3} \\ \underline{I}_{B4} \end{bmatrix}$$

Prethodni izraz se može napisati u formi blok matrica:

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

odnosno u razvijenoj formi:

$$\begin{aligned} I_x &= Y_1 V_x + Y_2 V_y \\ I_y &= Y_3 V_x + Y_4 V_y \end{aligned}$$

Kako su injektirane struje pasivnih čvorova jednake nuli, to je:

$$V_y = -Y_4^{-1}Y_3V_x$$

Zamjenom izraza za napon V_y u prvu relaciju slijedi:

$$I_x = Y_1 V_x - Y_2 Y_4^{-1} Y_3 V_x = Y_{red} V_x$$

gdje je Y_{red} redukovana matrica admitansi čvorova koja se određuje kao:

$$Y_{red} = (Y_1 - Y_2 Y_4^{-1} Y_3)$$

Lako je primjetiti da je dimenzija redukovane matrice admitansi manja za broj pasivnih čvorova čime je smanjena dimenzionalnost problema. Na kraju, vektor napona nezavisnih čvorova se određuje kao:

$$V_x = Y_{red}^{-1} I_x$$

Ako se prethodno modifikovani matematički model metoda napona nezavisnih čvorova primjeni u ovom zadatku, blok matrice koje konstituišu redukovanu matricu admitansi čvorova su:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -j7.65 & j3.3 & 0 \\ j3.3 & -j17.6 & j3.3 \\ 0 & j3.3 & -j7.51 \end{bmatrix} \quad Y_2 = \begin{bmatrix} j3.3 \\ j10 \\ j3.3 \end{bmatrix}$$

$$Y_3 = [j3.3 \quad j10 \quad j3.3] \quad Y_4 = [-j16.6]$$

pa je redukovana matrica admitansi čvorova:

$$Y_{red} = Y_1 - Y_2 Y_4^{-1} Y_3 = \begin{bmatrix} -j7 & j5.29 & j0.66 \\ j5.29 & -j11.58 & j5.29 \\ j0.66 & j5.29 & -j6.85 \end{bmatrix}$$

Vektor injektiranih struja u aktivnim čvorovima je:

$$I_x = \begin{bmatrix} -0.93 - j1.27 \\ 0.39 - j1.45 \\ -j1.36 \end{bmatrix}$$

pa se naponi nezavisnih čvorova određuju kao:

$$V_x = Y_{red}^{-1} I_x = \begin{bmatrix} 1.36 - j0.26 \\ 1.38 - j0.15 \\ 1.4 - j0.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$V_y = -Y_4^{-1} Y_3 V_x = [1.38 - j0.17] = [V_4]$$

Na kraju, naponi i struje grana se određuju primjenom relacija:

$$U = A^T V_B = \begin{bmatrix} 1.36 - j0.26 \\ 1.38 - j0.15 \\ 1.4 - j0.14 \\ 0.02 + j0.01 \\ 0.02 + j0.11 \\ j0.02 \\ 0.02 + j0.03 \\ -0.02 - j0.09 \end{bmatrix} \quad I = Y(U + U_g) - I_g = \begin{bmatrix} 0.65 - j0.16 \\ -0.54 + j0.07 \\ -0.13 + j0.09 \\ 0.03 - j0.07 \\ 0.36 - j0.07 \\ 0.2 \\ 0.1 - j0.07 \\ -0.3 + j0.07 \end{bmatrix}$$